Ασκήσεις:

Υπολογίστε την σχετική ένταση ακτινοβολίας μέλανος σώματος σε θερμοκρασία 5500K σε μήκος κύματος 1500 Å και 4500Å. Σχολιάστε την σημασία του αποτελέσματος για την αλλαγή της εκπομπής του Ήλιου από φάσμα απορρόφησης στο οπτικό σε φάσμα εκπομπής στο μακρινό υπεριώδες.

Το φάσμα Plank συναρτήσει του μήκους κύματος

$$B(\nu, T) = \frac{2\,hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{exp\frac{h\,c}{\lambda kT} - 1}$$

Τιμές σταθερών Plank, Boltzmann, ταχύτητα φωτός σε SI

Θερμοκρασία και μήκη κύματος σε μέτρα.

$$h = 6.62 \times\ 10^{-34}\,Js$$
$$k = 1.38 \times\ 10^{-23}\,J/K$$
$$c = 3.0 \times\ 10^{8}\,m/s$$
$$T = 5800\,K$$
$$\lambda_1 = 1500 \times 10^{-10} m$$
$$\lambda_2 = 4500 \times 10^{-10} m$$

Όρισμα εκθετικού για λ=1500E-10 μέτρα:

$$\frac{h\,c}{\lambda_1\,k\,T} =$$
$$\frac{6.6\,3.0}{1.5\,1.3\,5.8}\;\frac{10^{-34} \times\ 10^{8}}{10^{3}\ \times\ 10^{-10}\ \times 10^{-23}\,10^{3}} =$$
$$\frac{6.6\,3.0}{1.5\,1.3\,5.8} 10\ =\ 16$$

Όρισμα εκθετικού για λ=4500E-10 m:

$$\frac{h\,c}{\lambda_2\,k\,T} =$$

$$\frac{6.6\,3.0}{4.5\,1.3\,5.8}\,\frac{10^{-34}\times\,10^{8}}{10^{3}\,\times\,10^{-10}\,\times 10^{-23}\,10^{3}} =$$

$$\frac{6.6\,3.0}{4.5\,1.3\,5.8}10\,=\,5.4$$

Λόγος της έντασης Plank στα δύο μήκη κύματος

$$\frac{B(\lambda_1,T)}{B(\lambda_2,T)}\,=\,\frac{\frac{2hc^2}{\lambda_1^5}\frac{1}{exp(h\,c/(\lambda_1 kT))-1}}{\frac{2hc^2}{\lambda_2^5}\frac{1}{exp(h\,c/(\lambda_2 kT))-1}}$$

$$\frac{B(\lambda_1,T)}{B(\lambda_2,T)}\,=\,\frac{\lambda_2^5}{\lambda_1^5}\frac{\exp(h\,c/(\lambda_2 kT))-1}{exp(h\,c/(\lambda_1 kT))-1}\,=$$

$$(\frac{4.5}{1.5})^5\frac{(exp(5)-1}{(exp(16)-1)}\,=\,243\,\frac{147}{2\times\,10^9}\,=\,1.\times\,10^{-5}$$

Η ένταση είναι 100000 φορές μικρότερη στο μήκος κύματος 1500E-10 m.
Συνέπειες:
Στα 1550Å υπάρχουν γραμμές εκπομπής στη μεταβατική ζώνη.
Εκεί το συνεχές της φωτόσφαιρας θα είναι αμελητέο. Η συνάρτηση πηγής Sv=B(v,T) της φωτόσφαιρας έχει πολύ μικρότερη τιμή σε αυτό το μήκος κύματος σε σχέση με το οπτικό. Βοηθάει την δημιουργία γραμμών εκπομπής σε αυτή την περιοχή του φάσματος.

Υπολογίστε τον σχετικό πληθυσμό της στάθμης χαμηλότερης ενέργειας και της στάθμης n=2 του ηλίου σε Τοπική Θερμοδυναμική Ισορροπία για θερμοκρασία T=5700 K. Δίδεται πως η ενέργεια διέγερσης για την στάθμη n=2 είναι 20 eV. Συγκρίνετε το αποτέλεσμά σας με τον σχετικό πληθυσμό της στάθμης n=2 του υδρογόνου. Σχολιάστε τις επιπτώσεις για τις φωτοσφαιρικές γραμμές του ήλιου στη φωτόσφαιρα. (Foukal p. 105)

Ενεργειακή διαφορά σταθμών σε eV

$$\Delta E_{He\,I(1\rightarrow 2)} = 20eV$$

Η ενεργειακή διαφορά σε Joule.

$$\Delta E_{HeI(1\rightarrow 2)} = 20 \times 1.6 \times 10^{-19} Joule$$

Θερμοκρασία

$$T = 5700K$$

Το όρισμα του εκθετικού

$$\frac{\Delta E_{HeI(1\rightarrow 2)}}{kT} = \frac{3.2 \times 10^{-18} Joule}{7.86 \times 10^{-20} Joule}$$

Τα στατιστικά βάρη g_1,g_2 ορίζονται από τον αριθμό προβολών 2J+1 της ολικής στροφορμής J του ατόμου στην δεδομένη στάθμη. Έτσι για n=1 J=0, g_1=2J+1=1, g_2=2J+3.
(απο περιέργεια και μόνο, κοιτάξτε στη βάση δεδομένων ατομικής φυσικής:
https://physics.nist.gov/PhysRefData/ASD/lines_form.html
Advanced settings επιλέγεις g (check).

$$1s^{2\,1}S\,, J = 0\,, g_1 = 2J + 1 = 1$$

$$1s2p\,^1P\,, J = 1\,, g_2 = 2J + 1 = 3$$

Ο νόμος του Boltzmann μας δίνει το κλάσμα των πληθυσμών των δυο ενεργειακών σταθμών του ήλιου. Το κλάσμα αυτό είναι πολύ μικρός αριθμός. Αυτό σημαίνει πως σε φωτοσφαιρικές θερμοκρασίες οι φασματικές γραμμές του ήλιου είναι αμελητέες

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{g_2}{g_1} exp(-\frac{\Delta E_{He\,I(1\rightarrow 2)}}{kT}) = 7.6 \times 10^{-19}$$

Σύγκριση με τον σχετικό πληθυσμό του δεύτερου ενεργειακού επιπέδου του υδρογόνου.
Μήκος κύματος της εκπομπής Lyman-α από πρώτη σε δεύτερη ενεργειακή στάθμη.
Συχνότητα $\nu_{(H\,I\,1 \to 2)}$ Lyman-α.

$$\lambda_{HI\,1\to 2} = 1215.67 \times 10^{-10}\,m$$

$$\nu_{HI(1\to 2)} = \frac{c}{1215.67 \times 10^{-10}} = 2.4 \times 10^{15}\,Hz$$

$$T = 5700K$$

Ενεργειακή διαφορά 1,2 (και ενέργεια του φωτονίου Lyman-α.) σε Joule, eV.
Θεμελιώδεις κβαντικοί αριθμοί του ατόμου του υδρογόνου από όπου υπολογίζουμε τα στατιστικά βάρη του υδρογόνου.

$$h\,\nu_{HI(1\to 2)} = 1.6 \times 10^{-18} Joule$$

$$h\,\nu_{HI(1\to 2)}/1.6 \times 10^{-19} = 10.2eV$$

$$n_{quantum\,1} = 1$$

$$n_{quantum\,2} = 2$$

Νόμος Boltzmann για την θεμελιώδη και πρώτη διεγερμένη στάθμη του υδρογόνου.

$$g_1 = 2\,n^2_{quantum1} = 2$$

$$g_2 = 2\,n^2_{quantum\,2} = 8$$

Για T=5700K είναι πολύ μεγαλύτερο το κλάσμα από το αντίστοιχο του ήλιου.

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{g_2}{g_1} exp\Big(- \frac{h\,\nu_{HI(1\to 2)}}{kT}\Big) = 4exp(-20.7)$$

$$\frac{n_2}{n_1} = 3.8 \times 10^{-9}$$

Υπολογίστε την σχετική αφθονία (πυκνότητα) του ουδέτερου και μια φορά ιονισμένου ασβεστίου (δυναμικό ιονισμού 6.1 eV, και 11.9 eV, αντίστοιχα) στην Χρωμόσφαιρα όταν η θερμοκρασία T=6000 K. Χρησιμοποιείστε τις τιμές της ηλεκτρονικής πυκνότητας ne=2.6E12 cm^{-3}., 6.E10 cm^{-3}., 1.5E10 cm^{-3}. (τιμές από Foukal p. 289). Σχολιάστε τις επιπτώσεις του αποτελέσματός σας για την σχετική ένταση των φασματικών γραμμών του Ca I, και του Ca II.

Μάζα ηλεκτρονίου
θερμοκρασία

$$m_e = 1.9\times 10^{-31}\,kgr$$

$$T = 6000\,K$$

$$eV\ to\ joule = 1.6\times 10^{-19}$$

Ενέργειες ιονισμού του ουδέτερου ασβεστίου (Ca I) και του μία φορά ιονισμένου ασβεστίου (Ca II).

$$\Delta E_{1\,to\,2} = 6.1eV\,,\Delta E_{2\,to\,3} = 11.9eV$$

Τρεις τιμές ηλεκτρονικής πυκνότητας στη χρωμόσφαιρα (σε SI).

$$n_e = 2.6\times 10^{18}, 6\times 10^{16}, 1.5\times 10^{16}\,m^{-3}$$

Ο νόμος του Saha για πληθυσμούς Ca I και Ca II

$$\frac{n_{Ca\,II}}{n_{Ca\,I}} = \frac{2}{n_e}\exp\left(-\frac{\Delta E_{1\to 2}}{kT}\right)\frac{Z_{Ca_{II}}}{Z_{Ca_I}}\frac{1}{\lambda_e^3}$$

Η συνάρτηση διαμερισμού (partition function) είναι το άθροισμα των στατιστικών βαρών όλων των διεγερμένων σταθμών ενός ατόμου ή ιόντος (εξαρτώνται από το T).

$$Z(T) = \sum_{i=1}^{\infty} g_i\,exp\left(-\frac{\Delta E_i}{kT}\right)$$

Οι συναρτήσεις διαμερισμού για το ουδέτερο ασβέστιο και για τα ιόντα Ca II, Ca III.
(από περιέργεια κοιτάξτε την ατομική βάση
https://physics.nist.gov/PhysRefData/ASD/levels_form.html
Όπου δίδεται η συνάρτηση μερισμού για άτομο ή ιόν, και όπου η T δίνεται από τον χρήστη σε eV.

$$Z_{Ca\,I}(T = 6000K) = 1.36$$

$$Z_{Ca\,II}(T = 6000K) = 2.35$$

$$Z_{Ca\,III}(T = 6000K) = 1.$$

Μήκος κύματος de Broglie καθορίζει τις ενεργειακές καταστάσεις των ελεύθερων ηλεκτρονίων. (Ελέγξτε τις μονάδες για να βεβαιωθείτε πως το h^2 είναι σωστό, σε βιβλία βρήκα τυπογραφικά....)

$$\lambda_e = \sqrt{\frac{h^2}{2\,\pi m_e\,k\,T}} = 9\times 10^{-10}m$$

Νόμος του Saha για τον λόγο πληθυσμών ουδέτερου και μια φορά ιονισμένου ασβεστίου.

$$\frac{n_{Ca\,II}}{n_{Ca\,I}} = \frac{2}{n_e}\frac{Z_{Ca\,II}}{Z_{Ca\,I}}\,e^{\left(-\frac{\Delta E_{1\,to\,2}}{kT}\right)}\frac{1}{\lambda_e^3}$$

Νόμος του Saha για τον λόγο πληθυσμών και μια φορά και 2 φορές ιονισμένου ασβεστίου (προσέξτε τον συμβολισμό ουδετέρων ιόντων Ca I είναι το ουδέτερο, Ca II, Ca III το μία και δύο φορές ιονισμένο.

$$\frac{n_{Ca\,III}}{n_{Ca\,II}} = \frac{2}{n_e}\frac{Z_{Ca\,III}}{Z_{Ca\,II}}\,e^{\left(-\frac{\Delta E_{2\,to\,3}}{kT}\right)}\frac{2}{n_e}\frac{1}{\lambda_e^3}$$

Αριθμητικές τιμές του λόγου για τις τρεις τιμές της πυκνότητας ηλεκτρονίων.

$$\frac{n_{Ca\,II}}{n_{Ca\,I}} = 1.1\times\ 10^4, 4.8\times\ 10^5, 2.8\times 10^5, 1.9\times\ 10^6$$

$$\frac{n_{Ca\,III}}{n_{Ca\,II}} = 0.03, 1.5, 6.3$$

Παρατηρούμε πως το Ca II είναι πολύ πιο άφθονο από ότι το ουδέτερο στη χρωμόσφαιρα. Αποτέλεσμα οι γραμμές του ιόντος Ca II K,H είναι πολύ πιο λαμπρές από ότι οι γραμμές του Ca I.
Αντίθετα το Ca III είναι σπάνιες, και οι φασματικές του γραμμές αμυδρές.

Υπολογίστε την τυπική συνεισφορά των θερμικών κινήσεων στο εύρος των φασματικών γραμμών Fraunhofer όπως είναι οι γραμμές του νατρίου Na I, σχηματισμένες στο φωτοσφαιρικό επίπεδο για $\tau_{500nm} = 0.1$. Χρησιμοποιείστε την τιμή 2 km/s για τις τυρβώδεις ταχύτητες της κοκκίασης και συγκρίνετε το εύρος που προκαλούν με το θερμικό εύρος.

Μάζα των ατόμων νατρίου

$$m_p = 1.67 \times 10^{-27} km$$
$$m_{Na} = 23\, m_p = 3.84 \times 10^{-26} kgr$$

$$k_B = 1.38 \times 10^{-23} Joule/K$$
$$c = 3 \times 10^8 m/s$$

Μήκος κύματος της φασματικής γραμμής

$$\lambda = 5896 \times 10^{-10} m$$
$$v_{turb} = 2 \times 10^3 m/s$$

Εύρος στην ημίσεια τιμή της έντασης λόγω θερμικών κινήσεων

$$FWHM = 1.67 \frac{\lambda}{c} \sqrt{\frac{2\, k_B\, T}{m_{Na}}} = 0.067 \text{Å}$$

Και λαμβάνοντας υπόψιν και την κίνηση της τύρβης.

$$FWHM = 1.67 \frac{\lambda}{c} \sqrt{\frac{2\, k_B\, T}{m_{Na}} + v_{turb}^2} = 0.093 \text{Å}$$

Υποθέστε πως ανοδικές ταχύτητες 3 km/s που παρατηρούνται στο κεντρικό λαμπρό τμήμα ενώς φωτοσφαιρικού κόκκου μπορούν να ερμηνευτούν σαν μια ανοδική ακτινική κίνηση. Υπολογίστε την βαλλιστική κίνηση του υλικού υπό το ηλιακό βαρυτικό πεδίο. Εξηγήστε την κίνηση του υλικού με το παρατηρησιακό δεδομένο πως σπανίως μετριέται κόκκος με μετρήσιμη μετατόπιση Doppler σε 500km πάνω από το ύψος όπου $\tau_{500nm} = 0.1$. (Foukal p. 169).

Ανοδική ταχύτητα στο κέντρο κόκκου
Επιτάχυνση βαρύτητας.

$$v_{gran} = 3000\, m/s$$
$$g_{sun} = 274\, m/s^2$$

Ύψος ανόδου λόγω βαλλιστικής κίνησης.

$$height = \frac{v_{gran}^2}{2\, g_{sun}} = 16423m$$

Το ύψος είναι της τάξης των 20 χλμ, πολύ μικρότερο από τα 500χλμ