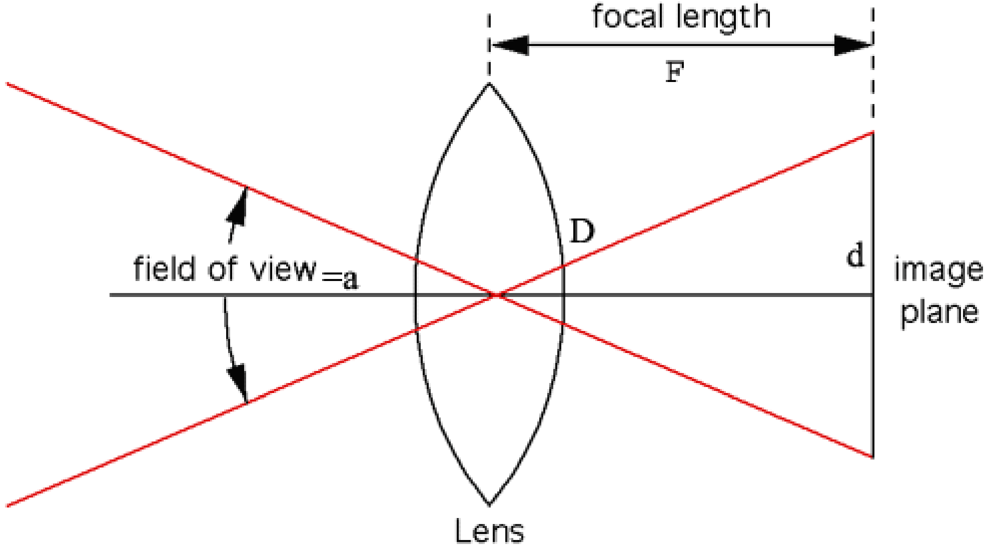
Exercises in Everything You Always Wanted to Know about Radiative transfer

But Were Afraid to Ask

Πόση ενέργεια ανά δευτερόλεπτο και ανά cm^2 δέχεται από τον ήλιο το εστιακό επίπεδο ενός τηλεσκοπίου διαμέτρου 50cm και εστιακής απόστασης 2m;



Χρειαζόμαστε την επιφάνεια S του ειδωλου στο εστιακό επίπεδο του φακου, και την ισχύ που περνα από το άνοιγμα A του φακού και καταλήγει στο «είδωλο» του ΗΛΙΟΥ:

Γνωρίζουμε ότι $a=0.5^o=0.008726$ rad

$d=F*a=200cm*0.008726$ rad$= 0.175$ cm

$S=\pi(d/2)^2= 2.4\ cm^2$

Ροή Ακτινοβολίας του Ηλίου στην επιφάνεια της ΓΗΣ:

$Flux=1000W/\ m^2 =0.1W/\ cm^2$

$A= \pi(D/2)^2=1963.50\ \ cm^2$

Ισχύς που Μπαινει στο Τηλεσκόπιο P

$P=A*Flux=S*Flux' = 1963.50\ \ cm^2 * 0.1W/\ cm^2 =$

$= 0.024\ cm^2 *Flux'$: Τελικά στό εστιακό επίπεδο έχουμε:

$81.8\ W/\ cm^2$.!!!!

Από την Εξίσωση Plank υπολογίστε την προσέγγιση Raleigh-Jeans όταν πρόκειται για μεγάλα μήκη κύματος:

$$S_\nu = B_\nu = \frac{2kT}{\lambda^2} \quad (\text{Rayleigh-Jeans approximation})$$

$$B_\nu(T) = \left(\frac{2h\nu^3}{c^2}\right)\frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right)-1} \quad (\text{Plank Function})$$

<u>ΑΠΑΝΤΗΣΗ</u>:

$$\text{Μεγαλο } \lambda \Rightarrow \text{μικρη } \nu = {}^{c}\!/_{\lambda} : h\nu \ll 1 \text{ οποτε:}$$

$$e^{\frac{h\nu}{kT}} \approx 1 + \frac{h\nu}{kT} \Rightarrow B_\nu(T) \approx \left(\frac{2h\nu^3}{c^2}\right)\frac{1}{1+\frac{h\nu}{kT}-1} =$$

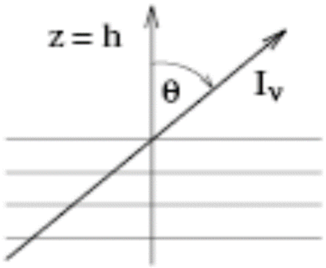
$$= \left(\frac{2h\nu^3}{c^2}\right)\frac{kT}{h\nu} = \frac{2kT}{\lambda^2}$$

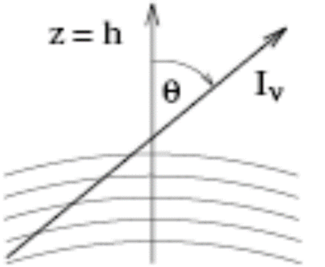
Λύστε την εξίσωση μεταφοράς της ακτινοβολίας (Προσέγγιση προσέγγιση παραλλήλων επιπέδων). :

$$\mu \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = I_\nu - S_\nu$$

$$\mu = \cos(\theta)$$

<u>ΑΠΑΝΤΗΣΗ</u>: Κατ αρχήν γράφουμε την εξίσωση στην παρακάτω μορφή και αναζητούμε ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟ ΠΑΡΑΓΟΝΤΑ ωστε τό αριστερό μέλος της εξίσωσης να αντιστοιχεί σε παράγωγο κάποιας συνάρτησης του I_ν. Μετά έχουμε απλή διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών:



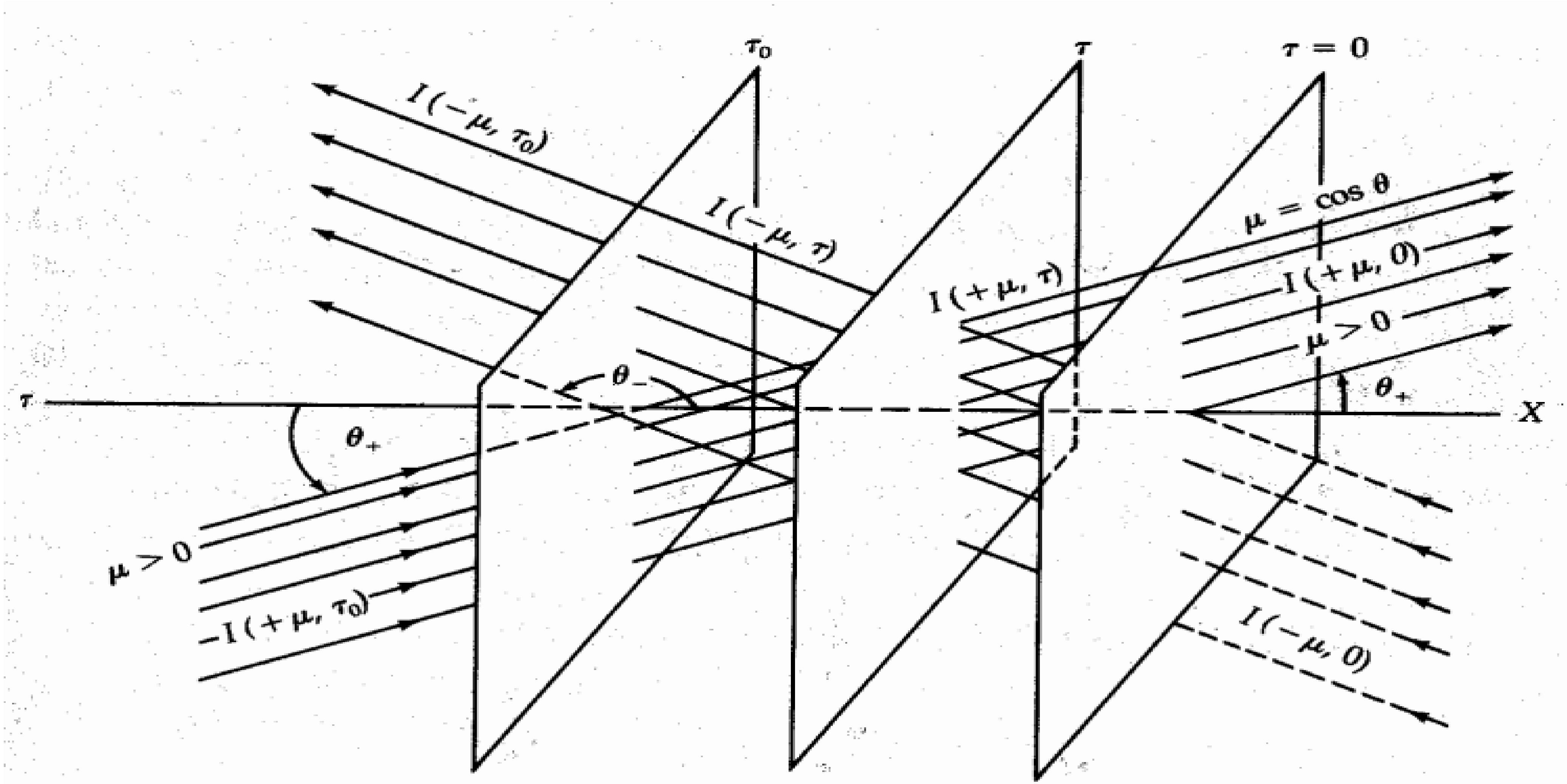


$$\left.\begin{array}{l} \mu \dfrac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = I_\nu - S_\nu \Leftrightarrow \dfrac{dI_\nu}{d\tau_\nu} - I_\nu \dfrac{1}{\mu} = -S_\nu \dfrac{1}{\mu} \\ \text{Integrating Factor: } e^{-\frac{\tau_\nu}{\mu}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{dI_\nu}{d\tau_\nu} e^{-\frac{\tau_\nu}{\mu}} - I_\nu \dfrac{e^{-\frac{\tau_\nu}{\mu}}}{\mu} = -S_\nu \dfrac{e^{-\frac{\tau_\nu}{\mu}}}{\mu} \\ d/d\tau_\nu \left(I_\nu e^{-\frac{\tau_\nu}{\mu}} \right) = -S_\nu \dfrac{e^{-\frac{\tau_\nu}{\mu}}}{\mu} \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$I_\nu e^{-\frac{\tau_\nu}{\mu}} = c_2 - \int S_\nu e^{-\frac{t_\nu}{\mu}} \frac{dt_\nu}{\mu} \Leftrightarrow I_\nu = c_2 e^{\frac{\tau_\nu}{\mu}} - \int S_\nu e^{-\frac{t_\nu - \tau_\nu}{\mu}} \frac{dt_\nu}{\mu}$$

Αυτή είναι η <u>Γενική Λύση</u> στην εξίσωση μεταφοράς της ακτινοβολίας σε ατμοσφαιρικό στρώμα πεπερασμένου πάχους (βλ. Επόμενη διαφάνεια). Παρακάτω θα δούμε πώς προσδιορίζεται η σταθερα c_2 αναλόγως του προβλήματος

Μεταφορά της ακτινοβολίας σε ατμοσφαιρικό στρώμα πεπερασμένου πάχους



Λύστε την εξίσωση μεταφοράς της ακτινοβολίας (Προσέγγιση προσέγγιση παραλλήλων επιπέδων). (ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΑΠΟ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΗ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ).

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Στην παρακάτω Γενική Λύση στην εξίσωση μεταφοράς της ακτινοβολίας σε ατμοσφαιρικό στρώμα *πεπερασμένου πάχους*, **τ_0**, προσδιορίζουμε την σταθερα **c_2** από τις οριακες συνθήκες στα σημεία
$\tau_\nu = \tau_0$ και **$\tau_\nu = 0$.**
Επειδή η ειδική ένταση I_ν εξαρτάται καί από το **μ** (ουσιαστικά έχουμε I_ν(**μ**)) θα διακρίνουμε τις ακτίνες *που* κινούνται από την βάση του στρώματος, σε βάθος **τ_0** και *προς* τα «έξω» **(μ>0)**, και αυτές *που* κινούνται στην αντίθετη κατεύθυνση ξεκινώντας από το σημείο **$\tau_\nu = 0$ (μ<0).**

$$I_\nu e^{-\frac{\tau_\nu}{\mu}} = c_2 - \int S_\nu e^{-\frac{t_\nu}{\mu}} \frac{dt_\nu}{\mu} \Leftrightarrow I_\nu = c_2 e^{\frac{\tau_\nu}{\mu}} - \int S_\nu e^{-\frac{t_\nu - \tau_\nu}{\mu}} \frac{dt_\nu}{\mu} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{at } \tau_0,\ \mu>0:\ I_\nu(\mu,\tau_0) = c_2 e^{\tau_0/\mu} \Rightarrow I_\nu(\mu,\tau_\nu) = I_\nu(\mu,\tau_0) e^{\frac{\tau_\nu - \tau_0}{\mu}} - \int_{\tau_0}^{\tau_\nu} \frac{dt_\nu}{\mu} S_\nu e^{-\frac{t_\nu - \tau_\nu}{\mu}} \\ \text{at } 0,\ \mu<0:\ I_\nu(\mu,0) = c_2 \Rightarrow I_\nu(\mu,\tau_\nu) = I_\nu(\mu,0) e^{\frac{\tau_\nu}{\mu}} - \int_0^{\tau_\nu} \frac{dt_\nu}{\mu} S_\nu e^{-\frac{t_\nu - \tau_\nu}{\mu}} \end{cases}$$

Αυτό είναι το αποτέλεσμα στην γενική μορφή. Είδαμε όμως στο μάθημα, πως οι ατμόσφαιρες συνήθως υπολογίζονται με πολύ μεγάλο (πρακτικά άπειρο) βάθος. Οι δύο εξισώσεις μας απλοποιούνται:

Η εξίσωση μεταφοράς ακτινοβολίας για ατμόσφαιρα απείρου βάθους

Από τις λύσεις που βρήκαμε στην προηγούμενη διαφάνεια, βλέπουμε πως για μ>0 όταν το βάθος $\boldsymbol{\tau_0}$ παίρνει μεγάλες τιμές, ο πρώτος όρος του δεξιού μέλους γίνεται εκθετικά μικρός. Στήν περίπτωση μ<0 αγνοούμε, συνήθως, τον πρώτο όρο διότι η επιφάνεια δεν δέχεται σημαντικό «εξωτερικό» φωτισμό.

$$\text{at } \mu>0: I_\nu(\mu,\tau_\nu) = I_\nu(\mu,\tau_0)e^{\frac{\tau_\nu-\tau_0}{\mu}} - \int_{\tau_0}^{\tau_\nu}\frac{dt_\nu}{\mu}S_\nu e^{-\frac{t_\nu-\tau_\nu}{\mu}} = -\int_{\infty}^{\tau_\nu}\frac{dt_\nu}{\mu}S_\nu e^{\frac{\tau_\nu-t_\nu}{\mu}}$$

$$= \int_{\tau_\nu}^{\infty}\frac{dt_\nu}{\mu}S_\nu e^{\frac{\tau_\nu-t_\nu}{\mu}}$$

$$\text{at } 0,\ \ \mu<0: I_\nu(\mu,\tau_\nu)=I_\nu(\mu,0)e^{\frac{\tau_\nu}{\mu}} - \int_{0}^{\tau_\nu}\frac{dt_\nu}{\mu}S_\nu e^{-\frac{t_\nu-\tau_\nu}{\mu}} = -\int_{0}^{\tau_\nu}\frac{dt_\nu}{\mu}S_\nu e^{-\frac{t_\nu-\tau_\nu}{\mu}}$$